Конспект по теме: ‘Основы алгебры логики. Решение логических задач.’

Учитель информатики Батракова Л.В.

Логика – это наука, изучающая методы установления истинности или ложности одних высказываний на основе истинности или ложности других высказываний.
Высказывание (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно.
Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть.
Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины. В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0).
Сложное логическое выражение – логическое выражение, составленное из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.

Основные логические операции

1. Логическое отрицание (инверсия, логическое НЕ) - если исходное выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное выражение ложно, то результат отрицания будет истинным. Обозначение: ¬

A	¬A
1	1
1	0

2. Логическое сложение (дизъюнкция, логическое ИЛИ) - это новое сложное выражение будет истинным тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из исходных (простых) выражений. Обозначение: ∨ или +

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3. Логическое умножение (конъюнкция, логическое И) - это новое сложное выражение будет истинным только тогда, когда истинны оба исходных простых выражения. Обозначение: ∧ или &

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4. Логическое следование (импликация) - связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (А), а второе (В)– следствием из этого условия. Результатом ИМПЛИКАЦИИ является ЛОЖЬ только тогда, когда условие А истинно, а следствие В ложно. Обозначение: →

A	B	A → B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5. Логическая равнозначность (эквивалентность, тождество) - определяет результат сравнения двух простых логических выражений А и В. Результатом ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ является новое логическое выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения одновременно истинны или ложны. Обозначение: $\equiv$ или $\leftrightarrow$

A	B	$A \equiv B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

6. Сложение по модулю 2 (исключающее ИЛИ, в просторечье XOR) - определяет результат сравнения двух простых логических выражений А и В. Результатом является новое логическое выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения различны. Обозначение: $\oplus$

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

☝ Приоритет логических операций в сложном логическом выражении

1. инверсия
2. конъюнкция
3. дизъюнкция
4. импликация
5. эквивалентность
6. сложение по модулю 2

<u>**Для изменения указанного порядка**</u> выполнения операций используются скобки.

☝ Таблицы истинности для сложных выражений

Таблица истинности - это таблица, устанавливающая соответствие между всеми возможными наборами логических переменных, входящих в логическую функцию и значениями функции.
Таблицы истинности применяются для:
- вычисления истинности сложных высказываний;
- установления эквивалентности высказываний.

Для построения таблицы истинности надо определить количество строк и столбцов.
<u>Количество строк</u> = 2^n + одна строка для заголовка (n - количество простых высказываний).
<u>Количество столбцов</u> = количество переменных + количество логических операций.
При построении таблицы надо учитывать все возможные сочетания логических значений 0 и 1 исходных выражений. Затем – определить порядок действий и составить таблицу с учетом таблиц истинности основных логических операций.

<u>ПРИМЕР</u>: составить таблицу истинности сложного логического выражения $D = \neg A \wedge (B \vee C)$
A,B, C - три простых высказывания, поэтому :
количество строк = $2^3 + 1 = 9$ (n=3, т.к. на входе три элемента A, B, C)
количество столбцов :

1) A
2) B
3) C
4) $\neg$ A это инверсия A (обозначим E)
5) $B \lor C$ это операция дизъюнкции (обозначим F)
6) $D = \neg A \land (B \lor C)$, т.е. $D = E \land F$ это операция конъюнкции

A	B	C	$E = \neg A$	$F = B \lor C$	$D = E \land F$
1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	o	1	0	1	0
1	o	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

☝ Основные законы алгебры логики

1. Закон рефлексивности (переместительный закон с самой собой)
   $A \lor A = A$
   $A \land A = A$
2. Закон коммутативности (переместительный закон)
   $A \lor B = B \lor A$
   $A \land B = B \land A$
3. Закон ассоциативности (сочетательный закон)
   $(A \land B) \land C = A \land (B \land C)$
   $(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$
4. Закон дистрибутивности (распределительный закон)
   $A \land (B \lor C) = A \land B \lor A \land C$
   $A \lor B \land C = (A \lor B) \land (A \lor C)$
5. Закон отрицания отрицания
   $\neg (\neg A) = A$
6. Законы де Моргана
   $\neg (A \land B) = \neg A \lor \neg B$
   $\neg (A \lor B) = \neg A \land \neg B$
7. Законы поглощения
   $A \lor (A \land B) = A$
   $A \land (A \lor B) = A$
   $A \lor (\neg A \land B) = A \lor B$
8. Закон непротиворечия
   $A \land \neg A = 0$
9. Закон исключенного третьего
   $A \lor \neg A = 1$
10. Законы нуля и единицы
   $A \land 0 = 0$
   $A \land 1 = A$

$A \vee 0 = A$
$A \vee 1 = 1$

Выражение дополнительных логических операций через базовые операции

1. Импликация: $A \to B = \neg A \vee B$
2. Эквиваленция: $A \equiv B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
3. Исключающее ИЛИ: $A \oplus B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

☝ Типовые задачи ЕГЭ, для решения которых требуются знания алгебры логики

1. Определение равносильности выражений. Решение этих задач основано на непосредственном применении законов алгебры логики, в основном закона Де Моргана.

Пример:
Какое логическое выражение эквивалентно выражению **$\neg A \wedge B \vee \neg(A \vee \neg B)$?**

1) **$\neg B \wedge \neg A$** 2) **$A \wedge \neg B$** 3) **$B \wedge \neg A$** 4) **$B \wedge A$**

Решение: Фактически это задание на применение законов де Моргана:

$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

И закона повторения: **$A \vee A = A$**

Применив этот закон к выражению: **$\neg A \wedge B \vee \neg(A \vee \neg B)$**, получим **$(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) = \neg A \wedge B$**.
Ответ: **3**

2. Определение логического выражения по таблице истинности. Для решения этих задач достаточно проверять предлагаемые ответы один за другим, поочередно подставляя в соответствующее логическое выражение значения переменных из каждой строки таблицы и проверяя, получается ли в результате указанное в этой же строке таблицы требуемое значение F. При этом, если для какой-то из строк таблицы получается неправильный результат, то можно прервать проверку данного варианта ответа и сразу перейти к следующему варианту.

Пример:
Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z.
Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

X	Y	Z	F
0	1	1	0
1	1	1	1
0	0	1	1

Какое выражение соответствует F?
1) $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ 2) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$ 3) $\neg X \vee \neg Y \vee Z$ 4) $X \vee \neg Y \vee \neg Z$

Решение: Надо помнить, что:
- логическая сумма $X \vee Y \vee Z$ равна 0 (выражение ложно) тогда и только тогда, когда все слагаемые одновременно равны нулю, а в остальных случаях равна 1 (выражение истинно);
- логическое произведение $X \wedge Y \wedge Z$ равно 1 (выражение истинно) тогда и только тогда, когда все сомножители одновременно равны единице, а в остальных случаях равно 0 (выражение ложно).

Проверим все выражения на соответствие таблице истинности:

X	*Y*	*Z*	*F*	$X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$	$\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$	$\neg X \vee \neg Y \vee Z$	$X \vee \neg Y \vee \neg Z$
0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Из таблицы видно, что указанному условию удовлетворяет только выражение: $X \vee \neg Y \vee \neg Z$
Ответ: **4**

3. Определение, какое имя соответствует предложенному логическому условию. Решать такие задачи можно двумя способами: или на основании рассуждений, используя законы алгебры логики (вариант 1) или используя таблицу истинности (вариант 2).

Пример:

Какое из приведенных имен удовлетворяет логическому условию:

¬ (последняя буква гласная → первая буква согласная) /\ вторая буква согласная

1) ИРИНА 2) АРТЕМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

Решение (вариант 1): Конъюнкция истинна, если оба утверждения истинны, т.е. утверждение «вторая буква согласная» - истинно и утверждение «¬ (последняя буква гласная → первая буква согласная)» - истинно. Так как последнее утверждение является отрицанием утверждения «(последняя буква гласная → первая буква согласная)», то оно должно быть ложным. Импликация ложна, если из истины следует ложь. Следовательно, если последняя буква гласная, то первая буква должна быть тоже гласной. Этому условию удовлетворяет слово – ИРИНА.

Ответ: **1**

Решение (вариант 2): Составим таблицу истинности:

Имя	X1: последняя буква гласная	X2: первая буква согласная	X3: вторая буква согласная	X4: X1 → X2	X5: ¬ X4	Результат: X5 /\ X3
ИРИНА	1	0	1	0	1	1
АРТЕМ	0	0	1	1	0	0
СТЕПАН	0	1	1	1	0	0
МАРИЯ	1	1	0	1	0	0

В таблице выделена строка, соответствующая правильному ответу. Вообще говоря, обнаружив, что условие выполняется уже для первого варианта, остальные варианты ответа можно не проверять.

Ответ: **1**

4. Определение числа, для которого истинно логическое высказывание. Здесь есть две группы задач: с вариантами ответов (из части А) и без вариантов ответа (из части В). В первом случае задачу можно решить, подставляя ответы в таблицу истинности (метод подстановки) или через преобразование выражения, используя законы алгебры логики.

Пример (из части А):

Для какого из указанных значений X истинно высказывание **¬((X > 2)→(X > 3))?**

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение 1 (прямая подстановка):

X	X > 2	X > 3	(X > 2)→(X > 3)	¬((X > 2)→(X > 3))
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

Ответ: **3**

Решение 2 (использование свойств импликации):

1) обозначим простые высказывания буквами: **A = X > 2, B = X > 3**
2) тогда исходное выражение можно переписать в виде **¬(A→B)=1** или **A→B=0**

3) импликация **A→B** ложна в одном единственном случае, когда **A = 1** и **B = 0**; поэтому заданное выражение истинно для всех X, таких что **X > 2** и **X ≤ 3**
4) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,

Ответ: **3**

Пример из части B:
Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание **(50<X·X)–>(50>(X+1)·(X+1))?**

Решение: Импликация ложна, если посылка истинна, а следствие ложно. В остальных случаях импликация истинна.
Пусть выражение 50<X·X – истинно, если (X > 7) ИЛИ (X < - 7). При X > 7, например, при X = 8 получаем, что 50>(8+1)·(8+1) – ложное высказывание. Следовательно, импликация ложна, а это противоречит условию. При X < - 7, например, при X = -8 получаем 50>(-8+1)·(-8+1) – истинное высказывание. Импликация истинна. Наибольшее число – -8.
Пусть выражение 50<X·X – ложно, если – 7 <= X < =7. Независимо от того истинна или ложно высказывание 50>(X+1)·(X+1) импликация будет истинна. Значит наибольшее значение – 7.
Ответ **7**

5. Определение решения логического уравнения. Можно решать такую задачу, составляя таблицу истинности для данного уравнения, но при большом количестве переменных это очень трудоемкая задача. Лучше решать задачу используя анализ или преобразование исходного выражения.

Пример:
Укажите значения переменных К, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(\neg(M \lor L) \land K) \to (\neg K \land \neg M \lor N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из 4 символов: значений переменных К, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что К=1, L=1, M=0, N=1.

Решение (вариант 1, анализ исходного выражения):
1) из формулировки условия следует, что выражение должно быть ложно только для одного набора переменных
2) из таблицы истинности операции «импликация» следует, что это выражение ложно тогда и только тогда, когда одновременно
$$(\neg(M \lor L) \land K) = 1 \quad \text{и} \quad (\neg K \land \neg M \lor N) = 0$$
3) первое равенство (логическое произведение равно 1) выполняется тогда и только тогда, когда $K = 1$ и $\neg(M \lor L)=1$**;** отсюда следует $M \lor L = 0$ (логическая сумма равна нулю), что может быть только при $M = L = 0$; таким образом, три переменных мы уже определили
4) из второго условия, $(\neg K \land \neg M \lor N)=0$, при $K = 1$ и $M = 0$ получаем $N = 0$

Ответ: 1000

Решение (вариант 2, упрощение выражения):
1) заменим импликацию по формуле $A \to B = \neg A \lor B$:
$$\neg(\neg(M \lor L) \land K) \lor (\neg K \land \neg M \lor N)=0$$
2) раскроем инверсию сложного выражения по формуле де Моргана $\neg(A \land B) = \neg A \lor \neg B$:
$$M \lor L \lor \neg K \lor (\neg K \land \neg M) \lor N=0$$
3) используя закон поглощения $A \lor (A \land B) = A$ упростим выражение: $\neg K \lor (\neg K \land \neg M) = \neg K$:
4) мы получили уравнение $M \lor L \lor \neg K \lor N=0$, в нем все слагаемые должны быть равны нулю
5) поэтому сразу находим $M = L = N = 0, \quad K = 1$

Ответ: 1000

6. Определение количества решений логического уравнения. Этот тип задач, так же как и предыдущие задачи лучше решать путем логических рассуждений.

Пример 1:

Сколько различных решений имеет уравнение:

$$(\mathbf{K} \wedge \mathbf{L} \wedge \mathbf{M}) \vee (\neg \mathbf{L} \wedge \neg \mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) = \mathbf{1}$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (поиск неподходящих комбинаций):

1) здесь используется сложение двух логических произведений, которое равно 1 если одно из двух слагаемых истинно
2) следовательно, исходное логическое уравнение можно представить в виде двух уравнений:

$K \wedge L \wedge M=1$

$\neg L \wedge \neg M \wedge N = 1$

Достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно любое.

3) уравнение $K \wedge L \wedge M=1$ только в одном случае, если K=L=M=1, а N может принимать любые (логические) значения, то есть, 0 или 1; следовательно, из первого уравнения получили два решения – 1110 и 1111
4) уравнение $\neg L \wedge \neg M \wedge N=1$ также имеет два решения: требуется, чтобы $L = M = 0$, $N = 1$, а K может быть равно 0 или 1; следовательно, из второго уравнения получили тоже два решения – 0001 и 1001
5) среди полученных четырех решений нет одинаковых, поэтому исходное уравнение имеет 4 решения

Ответ: **4**

Пример 2:

Сколько различных решений имеет уравнение:

$$((\mathbf{K} \vee \mathbf{L}) \rightarrow (\mathbf{L} \wedge \mathbf{M} \wedge \mathbf{N})) = \mathbf{0}$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение:

1) так как импликация ложна только в одном случае, когда из истины следует ложь, следовательно исходное уравнение можно представить в виде двух уравнений:

$K \vee L=1$

$L \wedge M \wedge N=0$

2) первое уравнение равно 1 в трех случаях: {K=L=1}, {K=0, L=1}, {K=1, L=0}
3) рассмотрим возможные решения второго уравнения для всех трех случаях
4) для случаев {K=L=1} и {K=0, L=1}, т.к. L=1, а K – в уравнение не входит, то второе уравнение выполняется в трех случаях: {M=0,N=1}, {M=1,N=0}, {M=N=0}
5) для случая {K=1, L=0}, т.к. L=0, второе уравнение выполняется всегда , при любых значениях M и N, и таких вариантов может быть четыре: {M=N=0}, {M=N=1}, {M=1, N=0}, {M=0, N=1}
6) всего получилось десять различных вариантов ответов.

Ответ: **10**

7. **Определение решения системы логических уравнений.** Есть различные способы решения систем логических уравнений. Это сведение к одному уравнению, построение таблицы истинности, декомпозиция, последовательное решение уравнений. Рассмотрим различные способы решения системы уравнений на одном примере.

Замечание: *Для сокращения записи будем использовать следующие обозначения:*

$\neg A \leftrightarrow \overline{A}$

A ∨ B ↔ A + B
A ∧ B ↔ A * B

Пример: Решить систему логических уравнений:

$$\begin{cases} \overline{A} \to B = 0 \\ A + C = 1 \end{cases}$$

1-й способ: ***сведение к одному уравнению***. Данный способ предполагает преобразование логических уравнений, таким образом, чтобы правые их части были равны истинностному значению (то есть 1). Для этого применяют операцию логического отрицания. Затем, если в уравнениях есть сложные логические операции, заменяем их базовыми: «И», «ИЛИ», «НЕ». Следующим шагом объединяем уравнения в одно, равносильное системе, с помощью логической операции «И». После этого, следует сделать преобразования полученного уравнения на основе законов алгебры логики и получить конкретное решение системы.

Решение:

1) Применяем инверсию к обеим частям первого уравнения:

$$\begin{cases} \overline{\overline{A} \to B} = 1 \\ A + C = 1 \end{cases}$$

2) Представим импликацию через базовые операции «ИЛИ», «НЕ»:

$$\begin{cases} \overline{A + B} = 1 \\ A + C = 1 \end{cases}$$

3) Поскольку левые части уравнений равны 1, можно объединить их с помощью операции "И" в одно уравнение, равносильное исходной системе:

$$\left(\overline{A + B}\right) * (A + C) = 1$$

Раскрываем первую скобку по закону де Моргана и преобразовываем полученный результат:

$$\left(\overline{A} * \overline{B}\right) * (A + C) = 1 \Leftrightarrow \overline{A} * \overline{B} * C = 1$$

Полученное уравнение, имеет одно решение: A=0, B=0 и C=1.

Ответ: A=0 B=0 C=1

2-й способ: ***построение таблиц истинности***. Поскольку логические величины имеют только два значения, можно просто перебрать все варианты и найти среди них те, при которых выполняется данная система уравнений. То есть, мы строим одну общую таблицу истинности для всех уравнений системы и находим строку с нужными значениями.

Решение:

Составим таблицу истинности для системы:

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{A} \to B$	$A + C$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	0	0	1	0	0

Выделена строчка, для которой выполняются условия задачи. Таким образом, A=0, B=0 и C=1.

Ответ: A=0 B=0 C=1

3-й способ: ***декомпозиции.*** Идея состоит в том, чтобы зафиксировать значение одной из переменных (положить ее равной 0 или 1) и за счет этого упростить уравнения. Затем можно зафиксировать значение второй переменной и т.д.

Решение:

Пусть А = 0, тогда:

$$\begin{cases} \overline{0} \to B = 0 \\ 0 + C = 1 \end{cases}$$

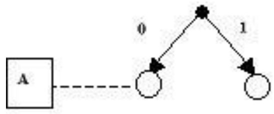
Из первого уравнения получаем В=0, а из второго – С=1. Решение системы: А = 0, В = 0 и С = 1.

Ответ: А=0 В=0 С=1

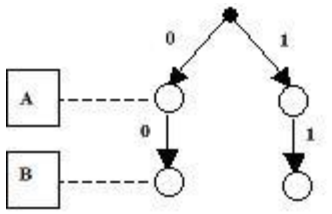
4-й способ: ***последовательное решение уравнений.*** На каждом шаге добавляется по одной переменной в рассматриваемый набор. Для этого необходимо преобразовать уравнения таким образом, что бы переменные вводились в алфавитном порядке. Далее строим дерево решений, последовательно добавляя в него переменные.

Решение:

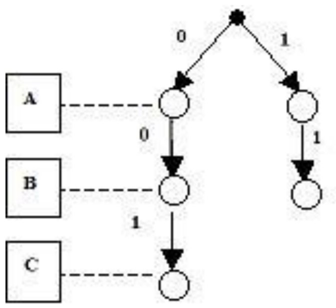
1) Первое уравнение системы зависит только от А и В, а второе уравнение от А и С. Переменная А может принимать 2 значения 0 и 1:



2) Из первого уравнения следует, что $\overline{A} \neq B \Rightarrow A = B$, поэтому при А = 0 получаем В = 0, а при А = 1 имеем В = 1. Итак, первое уравнение имеет два решения относительно переменных А и В.



3) Изобразим второе уравнение, из которого определим значения С для каждого варианта. При А=1 импликация не может быть ложной, то есть вторая ветка дерева не имеет решения. При А=0 получаем единственное решение С = 1:



Ответ: А=0 В=0 С=1

8. Определение количества решений системы логических уравнений. При решении таких задач используется последовательный метод решения уравнений, табличный метод и метод замены переменных. Суть последнего метода состоит в том, что

сначала необходимо максимально упростить каждое из уравнений на основе законов алгебры логики, а затем заменить сложные части уравнений новыми переменными и определить количество решений новой системы. Далее вернуться к замене и определить для нее количество решений. Рассмотрим решение таких задач на примерах.

Пример 1:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg \mathbf{X_1} \lor \mathbf{X_2} = \mathbf{1}$$
$$\neg \mathbf{X_2} \lor \mathbf{X_3} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{...}$$
$$\neg \mathbf{X_9} \lor \mathbf{X_{10}} = \mathbf{1}$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение **(последовательное решение, через единицы):**

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно 2^{10} = 1024, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) сначала рассмотрим первое уравнение $\overline{X_1} + X_2 = 1$; согласно таблице истинности операции «ИЛИ» оно имеет 3 решения (точнее, с учетом других переменных, 3 группы решений): (0,0,*), (0,1,*) и (1,1,*); здесь звездочка означает, что остальные 8 переменных могут быть любыми
3) выпишем все решения в столбик, чтобы была видна закономерность:
   (0,0,*)
   (0,1,*)
   (1,1,*)
4) заметим, что при $X_2 = 0$ значение X_1 должно быть равно 0, а при $X_2 = 1$ значение X_1 может быть любым
5) второе уравнение, рассматриваемое отдельно, тоже имеет 3 группы решений: (x_1,0,0,*), (x_1,0,1,*) и (x_1,1,1,*), где x_1, – некоторое логическое значение переменной X_1
6) решения системы первых двух уравнений – это те комбинации значений переменных, которые удовлетворяют одновременно и первому, и второму
7) из п. 4 следует, что при $X_2 = 0$ значение X_1 должно быть равно 0, а при $X_2 = 1$ значение X_1 может быть любым, поэтому решение системы двух первых уравнений включает 4 группы: из (x_1,0,0,*) и (x_1,0,1,*) при $X_1 = 0$ получаем две группы
   (0,0,0,*) и (0,0,1,*)
   и из (x_1,1,1,*) получается еще две:
   (0,1,1,*) и (1,1,1,*).
8) таким образом, система из двух уравнений имеет 4 решения
9) выпишем все решения в столбик, чтобы была видна закономерность:
   (0,0,0,*)
   (0,0,1,*)
   (0,1,1,*)
   (1,1,1,*)
10) таким образом, если $X_3 = 0$, все предыдущие переменные определяются однозначно – они должны быть равны нулю (идем по системе «снизу вверх»); если же $X_3 = 1$, то предыдущие переменные могут быть любыми, второе уравнение их не ограничивает
11) поэтому при увеличении числа переменных на единицу количество решений также увеличивается на единицу
12) аналогично доказывается, что система из 3 уравнений имеет 5 решений, и т.д., то есть, система из 9 уравнений с 10 переменными имеет 11 решений

Ответ: 11

Решение **(последовательное решение, через нули):**

1) сначала рассмотрим первое уравнение $\overline{X_1} + X_2 = 1$; согласно таблице истинности операции «ИЛИ» оно НЕ выполняется только в одном случае (точнее, с учетом других переменных, для одной группы комбинаций): (1,0,*) здесь звездочка означает, что остальные 8 переменных могут быть любыми

2) общее количество комбинаций X_1 и X_2 равно $2^2 = 4$, поэтому число решений первого уравнения равно $4 - 1 = 3$
3) второе уравнение, рассматриваемое отдельно, тоже ложно только для одной комбинации имеет 3 группы решений: (x_1,1,0,*), где x_1, – некоторое логическое значение переменной X_1
4) теперь рассмотрим вместе первое и второе уравнения и определим, в скольких случаях хотя бы одно из них неверно
5) множества (1,0,x_3,*) и (x_1,1,0,*) не пересекаются, потому что в первом $X_2 = 0$, а во втором $X_2 = 1$, поэтому система из двух уравнений не выполнена для 4-х комбинаций:
   (1,0,0,*), (1,0,1,*), (0,1,0,*) и (1,1,0,*)
6) общее количество комбинаций трех логический переменных равно $2^3 = 8$, поэтому количество решений системы из двух уравнений равно $8 - 4 = 4$
7) аналогично доказывается, что система из 3 уравнений имеет 5 решений, и т.д., то есть, система из 9 уравнений с 10 переменными имеет 11 решений

Ответ: 11

Решение **(табличный метод)**:

1) рассмотрим все решения первого уравнения $\overline{X_1} + X_2 = 1$ по таблице истинности:

$\overline{X_1} + X_2 = 1$	X_2	X_1
1	0	0
0	0	1
1	1	0
1	1	1

2) строчка, выделенная красным фоном, не удовлетворяет условию, поэтому дальше ее рассматривать не будем
3) теперь подключаем третью переменную и второе уравнение:

X_3	X_2	X_1
?	0	0
?	1	0
?	1	1

4) при каких значениях переменной X_3 будет верно условие $\overline{X_2} + X_3 = 1$? Очевидно, что на это уже не влияет X_1 (этот столбец выделен зеленым цветом). Если $X_2 = 1$, то сразу получаем, что $X_3 = 1$ (иначе $\overline{X_2} + X_3 = 0 + 0 = 0$):

X_3	X_2	X_1
0	0	0
1	0	0
1	1	0
1	1	1

5) как видно из таблицы, верхняя строчка предыдущей таблицы (где были все нули) дает два решения при подключении очередного уравнения, а все остальные – по одному
6) понятно, что такая же ситуация будет продолжаться и дальше, то есть, при добавлении каждой новой переменной число решений увеличивается на 1
7) рассуждая таким образом и дальше, получаем, что для 3-х уравнений с 4-мя переменными будет 5 решений, для 4 уравнений – 6 решений, …, а для 9 уравнений – 11 решений
8) обратите внимание на форму таблицы – единицы и нули образуют два треугольника

Ответ: 11

Пример 2:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_2 \equiv X_1) \lor (X_2 \land X_3) \lor (\neg X_2 \land \neg X_3) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) \lor (X_3 \land X_4) \lor (\neg X_3 \land \neg X_4) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_9 \equiv X_1) \lor (X_9 \land X_{10}) \lor (\neg X_9 \land \neg X_{10}) = 1$$
$$(X_{10} \equiv X_1) = 0$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (**табличный метод**):

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций
$$(X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$
3) заметим, что по свойству операции эквивалентности $X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = (X_2 \equiv X_3)$, поэтому уравнения можно переписать в виде
$$(X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$
4) первое уравнение выполняется, когда есть X_2 равно X_1 или X_3
5) по таблице истинности находим 6 вариантов (для удобства мы будем записывать сначала столбец для X_1, а потом для всех остальных в обратном порядке):

X_1	X_3	X_2
0	0	0
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	1

обратите внимание, что в каждой строчке в первых двух столбцах должно быть по крайней мере одно значение, равное значению в третьем столбце (который выделен желтым)
6) добавим еще одно уравнение и еще одну переменную X_4:

X_1	X_4	X_3	X_2
0	?	0	0
0	?	1	0
0	?	1	1
1	?	0	0
1	?	0	1
1	?	1	1

7) чтобы «подключить» второе уравнение, нужно использовать то же самое правило: каждой строчке в первых двух столбцах должно быть, по крайней мере, одно значение, равное значению в третьем столбце (который выделен желтым); это значит, что в первой и последней строчках (где $X_1 = X_3$) значение X_4 может быть любое (0 или 1), а в остальных строчках – только строго определенное:

X_1	X_4	X_3	X_2
0	0	0	0
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	1	1

1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

8) таким образом, количество решений при подключении очередного уравнения к системе возрастает на 2!
9) подключили X_5 – получили 10 решений, X_6 – получили 12 решений, X_7 – получили 14 решений, X_8 – получили 16 решений, X_9 – получили 18 решений, X_{10} – получили 20 решений.
10) остается одно последнее уравнение **$(X_{10} \equiv X_1) = 0$,** из которого следует, что X_{10} не равен X_1
11) из таблицы следует, что только в первой и последней строчках значения первой и последней переменных совпадают, то есть из полученных 20 решений нужно отбросить 2
12) таким образом, получается 20 – 2 = 18 решений

Ответ: 18

Пример 3:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg(X_1 \equiv X_2) \lor (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$\neg(X_3 \equiv X_4) \lor (X_5 \equiv X_6) = 1$$
$$\neg(X_5 \equiv X_6) \lor (X_7 \equiv X_8) = 1$$
$$\neg(X_7 \equiv X_8) \lor (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение **(замена переменных):**

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) заметим, что при обозначениях $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$, $Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$, $Y_3 = (X_5 \equiv X_6)$, $Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$ и $Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$ мы получаем систему из 4 уравнений и 5 независимыми переменными; эта система уравнений относится к типу, который рассмотрен в предыдущей разобранной задаче:

$$\neg Y_1 \lor Y_2 = 1$$
$$\neg Y_2 \lor Y_3 = 1$$
$$\neg Y_3 \lor Y_4 = 1$$
$$\neg Y_4 \lor Y_5 = 1$$

3) как следует из разбора задачи в примере 1, такая система имеет 5+1 = 6 решений для переменных $Y_1 \ldots Y_5$
4) теперь нужно получить количество решений в исходных переменных, $X_1 \ldots X_{10}$; для этого заметим, что переменные $Y_1 \ldots Y_5$ независимы;
5) предположим, что значение Y_1 известно (0 или 1); поскольку $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$, по таблице истинности операции «эквивалентность» (истина, когда два значения одинаковы), есть **две** соответствующих пары $(X_1;X_2)$ (как для случая $Y_1 = 0$, так и для случая $Y_1 = 1$)
6) у нас есть 5 переменных $Y_1 \ldots Y_5$, каждая их комбинация дает 2 пары $(X_1;X_2)$, 2 пары $(X_3;X_4)$, 2 пары $(X_5;X_6)$, 2 пары $(X_7;X_8)$ и 2 пары $(X_9;X_{10})$, то есть всего $2^5 = 32$ комбинации исходных переменных
7) таким образом, общее количество решений равно $6 \cdot 32 = 192$

Ответ: 192

Замечание: *При решении каждой системы логических уравнений следует учитывать ее особенности, на основе которых и выбирать метод решения.*

9. Решение задач на логику рассуждений. Обычно такие задачи решают, используя законы алгебры логики или составляя таблицы.

Пример :

Перед началом Турнира «Четырех» болельщики высказали следующие предположения по поводу своих кумиров:

A) Макс победит, Билл – второй;

B) Билл – третий, Ник – первый;

C) Макс – последний, а первый – Джон.

Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов. Какое место на турнире заняли Джон, Ник, Билл, Макс ? (**В ответе перечислите подряд без пробелов места участников в указанном порядке имен**.)

Решение 1 **(метод рассуждений)**

1) Есть «точная» информация, которая не подвергается сомнению - каждый из болельщиков оказался прав только в одном прогнозе.

2) Запишем высказывания болельщиков:

1. Макс победит, Билл – второй;
2. Билл – третий, Ник – первый;
3. Макс – последний, а первый – Джон.

3) Известно, что из двух высказываний каждого болельщика одно истинно, а другое – ложно.

4) Пусть первый болельщик угадал, что Макс победит, тогда третий болельщик ошибся в двух предположениях, а это не соответствует условию задачи.

5) Пусть первый болельщик угадал, что Билл занял второе место, тогда второй болельщик предсказал первое место Нику, следовательно, по предположению третьего, Макс занял последнее место, а Джон – третье.

Отсюда имеем: Ник – 1, Билл – 2, Джон – 3 и Макс – 4 место.

Ответ: НБДМ

Решение 2 **(табличный метод):**

Таблицы позволяют не только наглядно представить условие задачи или ее ответ, но и в значительной степени помогают делать правильные логические выводы в ходе решения задачи.

1) Запишем высказывания трех болельщиков в форме таблицы (заголовок строки обозначает место в турнирной таблице):

	Первый болельщик	Второй болельщик	Третий болельщик
1	Макс	Ник	Джон
2	Билл		
3		Билл	
4			Макс

2) Считая, что два человека не могут оказаться на одном месте, начнем рассматривать эту таблицу с той строчки, где больше всего информации (в данном случае – с первой).

3) Предположим, что Макс действительно занял первое место, как и сказал первый болельщик, тогда:

3.1. Второй и третий болельщики ошиблись, поставив на первое место Ника и Джона;

3.2. С учетом главного условия задачи, получается, что третий болельщик угадал во втором случае, и Макс будет на четвертом месте, но данное утверждение противоречит начальному предположению, следовательно, Макс должен быть не на первом месте, а на четвертом, как сказал третий болельщик:

	Первый болельщик	Второй болельщик	Третий болельщик
1	Макс	Ник	Джон
2	Билл		
3		Билл	
4			**Макс**

3.3. Имеем, что в первом прогнозе первый болельщик ошибся, то есть он угадал, что Билл занял второе место:

	Первый болельщик	Второй болельщик	Третий болельщик
1	Макс	Ник	Джон

2	**Билл**		
3		Билл	
4			**Макс**

3.4. Так как Билл – второй, он не может быть на третьем месте, поэтому из прогноза второго болельщика следует, что Ник – первый:

	Первый болельщик	Второй болельщик	Третий болельщик
1	Макс	**Ник**	Джон
2	**Билл**		
3		Билл	
4			**Макс**

3.5. Определимся с Джоном – ему досталось единственное свободное третье место:

	Первый болельщик	Второй болельщик	Третий болельщик
1	Макс	**Ник**	Джон
2	**Билл**		**Джон**
3		Билл	
4			**Макс**

Получаем окончательный список победителей: Ник, Билл, Джон, Макс.
Ответ: НБДМ

10. Решение задач на запросы к серверу.

Пример 1:

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке возрастания количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.

1) **принтеры & сканеры & продажа**
2) **принтеры & сканеры**
3) **принтеры | сканеры**
4) **принтеры | сканеры | продажа**

Решение **(вариант 1, рассуждение с использованием свойств операций «И» и «ИЛИ»):**

1) меньше всего результатов выдаст запрос с наибольшими ограничениями – первый (нужны одновременно принтеры, сканеры и продажа)
2) на втором месте – второй запрос (одновременно принтеры и сканеры)
3) далее – третий запрос (принтеры или сканеры)
4) четвертый запрос дает наибольшее количество результатов (принтеры или сканеры или продажа)

Ответ: 1234

Решение **(вариант 2, через таблицы истинности):**

1) каждое из условий можно рассматривать как сложное высказывание
2) обозначим отдельные простые высказывания буквами:
   A: принтеры (на странице есть слово «принтеры»)
   B: сканеры
   C: продажа
3) запишем все выражения-запросы через логические операции
   $X_1 = A \cdot B \cdot C$, $X_2 = A \cdot B$, $X_3 = A + B$, $X_4 = A + B + C$
4) здесь присутствуют три переменные, A, B и C (хотя второе и третье выражения от C не зависят!), поэтому для составления таблицы истинности нужно рассмотреть $8 = 2^3$ всевозможных комбинаций этих логических значений
5) выражение $X_1 = A \cdot B \cdot C$ равно 1 (истинно) только при $A = B = C = 1$, в остальных случаях – равно 0 (ложно)
6) выражение $X_2 = A \cdot B$ равно 1 только при $A = B = 1$, в остальных случаях – равно 0

7) выражение $X_3 = A + B$ равно 0 только при $A = B = 0$, в остальных случаях – равно 1
8) выражение $X_4 = A + B + C$ равно 0 только при $A = B = C = 0$, в остальных случаях – 1
9) запишем результаты пп. 5-8 в виде таблицы истинности

A	B	C	$X_1 = A \cdot B \cdot C$	$X_2 = A \cdot B$	$X_3 = A + B$	$X_4 = A + B + C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

10) по таблице видим, что наименьшая «область действия» у первого выражения, поисковый сервер выдаст наименьшее число запросов
11) область, где $X_2 = 1$, включает в себя всю область, где $X_1 = 1$ и еще один вариант, поэтому «поисковик» выдаст больше запросов, чем для первого случая
12) аналогично делаем вывод, что область $X_3 = 1$ включает всю область $X_2 = 1$ и расширяет ее, а область $X_4 = 1$ – это расширение области $X_3 = 1$

<u>Ответ:</u> 1234

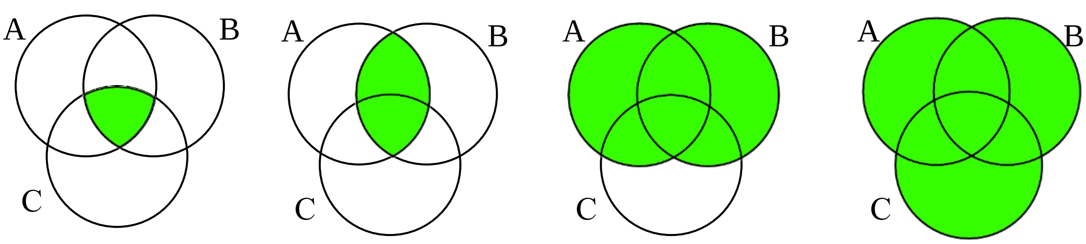
<u>Решение</u> **<u>(вариант 3, через диаграммы Эйлера-Венна):</u>**

1) запишем все ответы через логические операции

$$X_1 = A \cdot B \cdot C, \quad X_2 = A \cdot B, \quad X_3 = A + B, \quad X_4 = A + B + C$$

2) покажем области, определяемые этими выражениями, на диаграмме с тремя областями

$X_1 = A \cdot B \cdot C$ $\quad X_2 = A \cdot B$ $\quad X_3 = A + B$ $\quad X_4 = A + B + C$



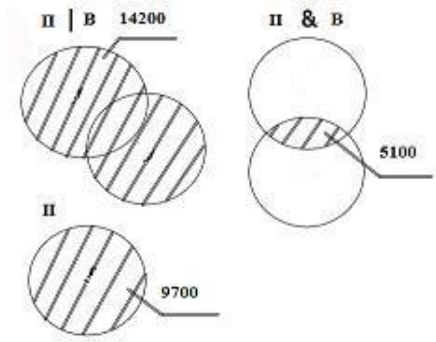
3) сравнивая диаграммы, находим последовательность областей в порядке увеличения: (1,2,3,4), причем каждая следующая область в этом ряду охватывает целиком предыдущую (как и предполагается в задании, это важно!)

<u>Ответ:</u> 1234

<u>Пример 2:</u>
В таблице приведены запросы и количество страниц, которые нашел поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

Запрос	*Количество страниц (тыс.)*
пирожное | *выпечка*	*14200*
пирожное	*9700*
пирожное & *выпечка*	*5100*

Сколько страниц (в тысячах) будет найдено по запросу **выпечка**



<u>Решение:</u> По запросу *пирожное* | *выпечка* выдается множество страниц, в которых встречаются или одно слово или другое. По запросу *пирожное* & *выпечка* выдается множество страниц, в которых встречаются оба слова вместе. По запросам *пирожное* и *выпечка* выдается множество страниц, в которых встречается

только данное слово. На рисунке показаны диаграммы Эйлера-Венна по данным запросам.
Следовательно, чтобы получить количество страниц, найденных по запросу *выпечка* надо выполнить следующие вычисления:
14200 +5100 – 9700=9600
Ответ: **9600**

Используемая литература:
1. Богомолова О.Б Логические задачи на ЕГЭ: имена и логические выражения/ Учебно-методическая газета для учителей информатики: Информатика №8, 2011 г.
2. Поляков К.Ю. Системы логических уравнений / Учебно-методическая газета для учителей информатики: Информатика №14, 2011 г.
3. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ. Информатика. Тематические тестовые задания ФИПИ/ М. Издательство “Экзамен”, 2012.

Ссылки:
http://kpolyakov.narod.ru/
http://www.inf1.info
http://info.150-4ex-lyubschool.edusite.ru/DswMedia/v9.pdf

Задачи для самостоятельного решения

1. Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению $\mathbf{A \wedge \neg(\neg B \vee C)}$.

1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ 2) $A \wedge \neg B \wedge \neg C$ 3) $A \wedge B \wedge \neg C$ 4) $A \wedge \neg B \wedge C$

2. Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

Какое выражение соответствует F?
1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ 2) $X \wedge Y \wedge Z$ 3) $X \vee Y \vee Z$ 4) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$

3. Какое из приведённых имен удовлетворяет логическому условию:
(первая буква согласная → вторая буква согласная) ∧ (предпоследняя буква гласная → последняя буква гласная)*?*

1) КРИСТИНА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

4. Для какого из указанных значений X истинно высказывание $\mathbf{\neg((X > 3) \vee (X<3))\rightarrow(X < 1))}$**?**

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

5. Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание:
$\mathbf{((X>7) \vee (X<7)) \text{–>} (X>8)}$**?**

6. Укажите значения переменных К, L, M, N, при которых логическое выражение
$\mathbf{(\neg(M \vee L) \wedge К) \rightarrow (\neg К \wedge \neg M \vee N)}$
ложно. Ответ запишите в виде строки из 4 символов: значений переменных К, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что К=1, L=1, M=0, N=1.

7. Сколько различных решений имеет уравнение:

$$\mathbf{((J\rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((J \wedge \neg K) \rightarrow \neg(M \wedge N \wedge L)) \wedge (M\rightarrow J) = 1}$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

8. На вопрос “Кто из твоих учеников изучал логику?” учитель ответил: “ Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис. Однако неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис”. Составьте систему логических уравнений и определите, кто же изучал логику.

9. Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (\neg X_3 \wedge X_4) \vee (X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$
$$(X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) \vee (\neg X_5 \wedge X_6) \vee (X_5 \wedge \neg X_6) = 1$$
$$(X_5 \wedge X_6) \vee (\neg X_5 \wedge \neg X_6) \vee (\neg X_7 \wedge X_8) \vee (X_7 \wedge \neg X_8) = 1$$
$$(X_7 \wedge X_8) \vee (\neg X_7 \wedge \neg X_8) \vee (\neg X_9 \wedge X_{10}) \vee (X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

10. Девять школьников, остававшихся в классе на перемене, были вызваны к директору. **Один из них** разбил окно в кабинете. На вопрос директора, кто это сделал, были получены следующие ответы: Володя: «Это сделал Саша».
Аня: «Володя лжет!». Егор: «Маша разбила». Саша: «Аня говорит неправду!» Рома: «Разбила либо Маша, либо Нина…». Маша: «Это я разбила!» Нина: «Маша не разбивала!» Коля: «Ни Маша, ни Нина этого не делали».
Олег: «Нина не разбивала!» Кто разбил окно, если известно, что из этих девяти высказываний истинны только три?
Ответ запишите в виде первой буквы имени.

11. В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для логической операции «И» – символ «&». В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
Крейсер | Линкор	7000
Крейсер	4800
Линкор	4500

Какое количество страниц (в тысячах) будет найдено по запросу *Крейсер & Линкор* ?
Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

☝

Чтобы успешно справиться с задачами данной темы, надо знать:

1. логические операции
2. законы алгебры логики
3. правила составления таблиц истинности
4. методы решения логических задач

Желаю удачи ☺